

第15章 伝達関数モデル(TF)の読み方

15.1 伝達関数モデルのプロパ性と極および零点

15.1.1 プロパ性

伝達関数は以下の性質から数種類に分類できる。

$$\text{プロパー} \Leftrightarrow |G(s)| \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} A < \infty$$

$$\text{厳密にプロパー} \Leftrightarrow |G(s)| \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{非プロパー} \Leftrightarrow |G(s)| \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} \infty$$

15.1.2 極、零点

極と零点は以下のように定義できる。

$$\text{極} \Leftrightarrow p_i = \arg_{s \in \mathbb{C}} (|G(s)|^{-1} = 0)$$

$$\text{零点} \Leftrightarrow z_i = \arg_{s \in \mathbb{C}} (|G(s)| = 0)$$

15.1.3 有理多項式型伝達関数モデル

有理多項式型伝達関数モデル（以下有理関数モデルと略す）とは以下のように表現される。

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (15.1)$$

ここで、 $n(s), d(s)$ はそれぞれ分子多項式、分母多項式と呼ばれ

$$n(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \quad (15.2)$$

$$d(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (15.3)$$

のように表現できるとする。ここで $b_m \neq 0$ とする。

以下の事実は定義より明らかである。

$$(G(s) \text{ はプロパー }) \Leftrightarrow (m \leq n)$$

$$(G(s) \text{ は厳密にプロパー }) \Leftrightarrow (m < n)$$

$$(G(s) \text{ は非プロパー }) \Leftrightarrow (m > n)$$

$$(p_i \text{ は } G(s) \text{ の極}) \Leftrightarrow (d(p_i) = 0)$$

$$(z_i \text{ は } G(s) \text{ の零点}) \Leftrightarrow (n(z_i) = 0)$$

$$G(s) \text{ の極は } n \text{ 個ある}$$

$G(s)$ の零点は m 個ある

有理多項式型伝達関数モデルは微分方程式モデルから容易に変換することができるので最もよく用いられるモデルである。

15.1.4 部分分数展開型伝達関数モデル

$G(s)$ が厳密にプロパーで、かつ極が互いに異なれば以下の部分分数展開モデル（以下部分分数モデルと略す）に変換できる。

$$G(s) = \frac{q_1}{s - p_1} + \frac{q_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{q_n}{s - p_n} \quad (15.4)$$

ここで $\{p_i\}$ は $G(s)$ の極であり $\{q_i\}$ は対応する留数で以下のように求まる。

$$q_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) G(s) \quad (15.5)$$

$G(s)$ が重根を持つ場合には多少の工夫が必要であるが、同様に留数を求めることができ、以下のような拡張された部分分数展開が可能である。

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\nu} \sum_{\ell=1}^{\mu_k} \frac{q_{k\ell} s^{\ell-1}}{(s - p_k)^\ell} \quad (15.6)$$

ここで、 μ_k は極 p_k の重複度で、 $\sum_{k=1}^{\nu} \mu_k = n$ である。

また、極のなかに共役複素数が含まれる場合には極 $p_k = \sigma_k + j\omega_k$ とその共役極 $\bar{p}_k = \sigma_k - j\omega_k$ に対する留数も共役になるので

$$(s - p_k)(s - \bar{p}_k) = s^2 - 2\sigma_k s + (\sigma_k^2 + \omega_k^2) = s^2 + \alpha_k s + \beta_k$$

と書くと $G(s)$ は

$$G(s) = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{q_{1k}}{s - p_k} + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{q_{2k}}{s^2 + \alpha_k s + \beta_k} \quad (15.7)$$

と書くこともできる。この表現形式は係数がすべて実数になるという点が特徴である。ただし、 n_1, n_2 はそれぞれ実数極と共役複素極の対の数で、 $n_1 + 2n_2 = n$ である。

15.1.5 伝達関数の安定条件

インパルス応答が $t \rightarrow \infty$ で 0 に収束するとき、システムは安定であるという。安定なシステムの伝達関数を安定な伝達関数と呼ぶことにする。

部分分数モデルのラプラス逆変換、すなわちインパルス応答は

$$g(t) = \sum_{i=1}^n q_i e^{p_i t} \quad (15.8)$$

と書ける。 p_i が実数のときは

$$|q_i e^{p_i t}| = |q_i| e^{p_i t}$$

であり、複素数の場合は $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ とおくと

$$|q_i e^{p_i t}| = |q_i| e^{\sigma_i t}$$

であることから、

伝達関数 $G(s)$ が安定である必要十分条件はすべての極の実部が負、すなわち

$$\sigma_i = \operatorname{Re}(p_i) < 0, \quad \forall i$$

が成り立つことである。

15.2 安定判別法

$G(s)$ の極が計算できる場合には前述の方法で安定判別が可能であるが、有理多項式モデルから直接判別ができる
と便利である。古典制御の歴史において Maxwell をはじめ多くの研究者がこの問題を研究した。3つの代表的な
手法を紹介する。

15.2.1 ラウスの安定判別

15.2.2 フルビッツの安定判別

15.3 システムの合成

15.3.1 システムの結合

$y_1 = G_1(s)u_1, y_2 = G_2(s)u_2$ とする。この2つのシステムの結合演算を定義する。

直列結合 ($u_1 = y_2, y = y_1, u = u_2$)

$$\Rightarrow y = G_1(s)G_2(s)u$$

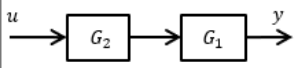
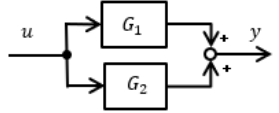
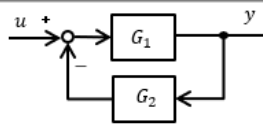
並列結合 ($y = y_1 + y_2, u = u_1 = u_2$)

$$\Rightarrow y = (G_1(s) + G_2(s))u$$

フィードバック結合 ($y = y_1 = u_2, u_1 = r - y_2$)

$$\Rightarrow y = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}r$$

Table 15.1: Elementary connection rules

結合演算	ブロック線図	数式表現
直列結合		$y = G_1 G_2 u$
並列結合		$y = (G_1 + G_2)u$
フィードバック結合		$y = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} u$

15.3.2 ブロック線図代数

前述のシステムの結合は要素数が多くなると複雑になる。数式表現と等価なブロック線図による表現は設計者の理解を助ける重要なツールである。MATLAB と併用して使用される SIMULINK はブロック線図でシステムの結合を取り扱う図式である。

Table 15.2: Symbols for Block Diagram

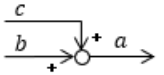
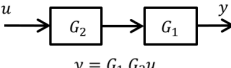
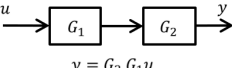
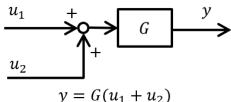
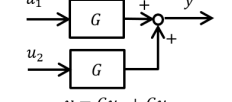
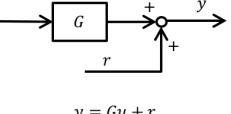
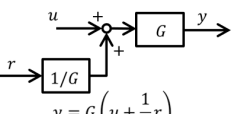
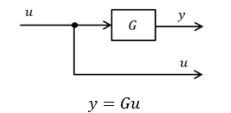
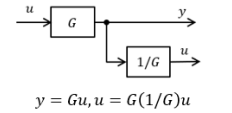
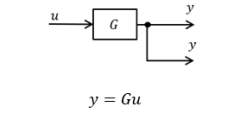
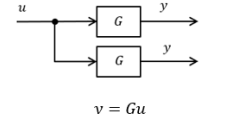
記号名称	ブロック線図	数式表現
信号 u, y ブロック G		$y = Gu$
引出し線		$a = b = c$
加算点		$a = b + c$

Table 15.3: Equivalent Block diagrams

結合演算	ブロック線図 数式表現	等価な表現
直列結合の 交換則	 $y = G_1 G_2 u$	 $y = G_2 G_1 u$
結合点の 移動1	 $y = G(u_1 + u_2)$	 $y = G u_1 + G u_2$
結合点の 移動2	 $y = G u + r$	 $y = G \left(u + \frac{1}{G} r \right)$
結合演算	ブロック線図 数式表現	等価な表現
引出し点の 移動1	 $y = G u$	 $y = G u, u = G(1/G)u$
引出し点の 移動2	 $y = G u$	 $y = G u$

第15章 伝達関数モデル(TF)の読み方

15.1 伝達関数モデルのプロパ性と極および零点

15.1.1 プロパ性

伝達関数は以下の性質から数種類に分類できる。

$$\text{プロパー} \Leftrightarrow |G(s)| \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} A < \infty$$

$$\text{厳密にプロパー} \Leftrightarrow |G(s)| \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{非プロパー} \Leftrightarrow |G(s)| \xrightarrow{|s| \rightarrow \infty} \infty$$

15.1.2 極、零点

極と零点は以下のように定義できる。

$$\text{極} \Leftrightarrow p_i = \arg_{s \in \mathbb{C}} (|G(s)|^{-1} = 0)$$

$$\text{零点} \Leftrightarrow z_i = \arg_{s \in \mathbb{C}} (|G(s)| = 0)$$

15.1.3 有理多項式型伝達関数モデル

有理多項式型伝達関数モデル（以下有理関数モデルと略す）とは以下のように表現される。

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)} \quad (15.1)$$

ここで、 $n(s), d(s)$ はそれぞれ分子多項式、分母多項式と呼ばれ

$$n(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \quad (15.2)$$

$$d(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (15.3)$$

のように表現できるとする。ここで $b_m \neq 0$ とする。

以下の事実は定義より明らかである。

$$(G(s) \text{ はプロパー }) \Leftrightarrow (m \leq n)$$

$$(G(s) \text{ は厳密にプロパー }) \Leftrightarrow (m < n)$$

$$(G(s) \text{ は非プロパー }) \Leftrightarrow (m > n)$$

$$(p_i \text{ は } G(s) \text{ の極}) \Leftrightarrow (d(p_i) = 0)$$

$$(z_i \text{ は } G(s) \text{ の零点}) \Leftrightarrow (n(z_i) = 0)$$

$G(s)$ の極は n 個ある