

第10章 連続時間畳込み積分モデル → 離散時間畳込み積分モデル

10.1 連続時間畳込み積分 → 離散時間畳込み積分

10.1.1 連続時間と離散時間

連続時間軸 $\mathbf{R}_+$ 上に等間隔に信号 $f(t)$ をサンプリングする状況を考える。以下の用語を定義する。

連続時間 $t \in [0, \infty) = \mathbf{R}_+$

連続時間信号 $f(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$

サンプリング周期 $\Delta (> 0)$

サンプリング時刻列 $\{0, \Delta, 2\Delta, 3\Delta, \dots, k\Delta, \dots\}$

サンプル値列 $\{f(0), f(\Delta), f(2\Delta), \dots, f(k\Delta), \dots\}$

これに対して、時間の物理量としての情報を無視し、順序のみに着目する場合は以下のような用語と記号を用いる。

離散時間 $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

サンプル値列 $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_k, \dots\}$

10.1.2 状態空間モデル → 畳込み積分モデル → 離散時間畳込み積分モデル

SSのパラメータを用いた畳み込み積分モデルを考える。すなわち状態空間モデル

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (10.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (10.2)$$

の畳込み積分モデルは

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bf(\tau)d\tau \quad (10.3)$$

となることを思い出そう。

ここで上記の積分区間 $[0, t]$ を $[t_1, t_2]$ に対応させると

$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_1)}x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (10.4)$$

$$y(t_2) = Cx(t_2) \quad (10.5)$$

となる。

10.1.3 0 次ホルダによる定周期離散化

離散化周期を δ とし、隣接する 2 時刻を $t_1 = k\Delta, t_2 = (k+1)\Delta$ とおくと

$$x((k+1)\Delta) = e^{A\Delta}x(k\Delta) \quad (10.6)$$

$$+ \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} e^{A((k+1)\Delta-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(k\Delta) = Cx(k\Delta) \quad (10.7)$$

となる。入力信号が 0 次ホールド型の階段信号、すなわち $u(t)$ が離散化周期間で一定 ($u(t) = u(k\Delta), t \in [k\delta, (k+1)\delta)$) とすると離散時間の状態空間モデル

$$x_{k+1} = [A]x_k + [B]u_k \quad (10.8)$$

$$y_k = [C]x_k \quad (10.9)$$

が得られる。ここで

$$[A] = e^{A\Delta} \quad (10.10)$$

$$[B] = \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} e^{A(t-\tau)}Bd\tau = \int_0^\Delta e^{A\tau}d\tau B \quad (10.11)$$

$$[C] = C \quad (10.12)$$

である。

10.1.4 離散時間畳込み積分モデル → 離散時間応答

離散時間系列の入力信号 $\{u(k)\}_{k=1}^N$ をシステムに印加したときの出力信号 $\{y(k)\}_{k=0}^N$ は初期状態を x_0 として、以下のアルゴリズムで計算できる。

```
x = x0
for k = 0:N
    y(k) = C*x
    if k>=N break, end
    x = A*x + B*u(k)
    k = k+1
end
```

このアルゴリズムは MATLAB 風に記述しているが、アルゴリズムの意味だけを読み取っていただきたい。配列のインデックスが 0 開始になっているのでこのままでは MATLAB では動作しないので注意されたい。