第 9 章　畳込み積分モデル → 伝達関数モデル

9.1　畳込み積分モデル → 伝達関数

畳込み積分モデル

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{9.1}$$

のラプラス変換を考える。ラプラス変換の定義式

$$\mathcal{L}\left[y(t)\right] = \int_0^\infty y(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{9.2}$$

に畳み込み積分モデルを代入し、変数変換 $t-\tau = t'$ を施すと

$$\begin{aligned}
\hat{y}(s) &= \mathcal{L}\left[\int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \int_{t=0}^\infty \int_{\tau=0}^t g(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{t'=0}^\infty \int_{\tau=0}^\infty g(t')u(\tau)\mathrm{e}^{-s(\tau+t')}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t' \\
&= \int_{t'=0}^\infty g(t')\mathrm{e}^{-st'}\mathrm{d}t' \int_{\tau=0}^\infty u(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \hat{g}(\omega)\hat{u}(\omega)
\end{aligned} \tag{9.3}$$

となる。ここで。変数変換により積分領域 AOB は Fig**??**のように (τ, t) 平面から (τ, t') 平面に変換され、微小面積要素は

$$\mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}t' = \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}(t-\tau) = \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}t - \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}t \tag{9.4}$$

と対応付けられていることに注意されたい。
これを整理すると以下の表現が得られる。

$$\boxed{\hat{y}(s) = \hat{g}(s)\hat{u}(s)} \tag{9.5}$$

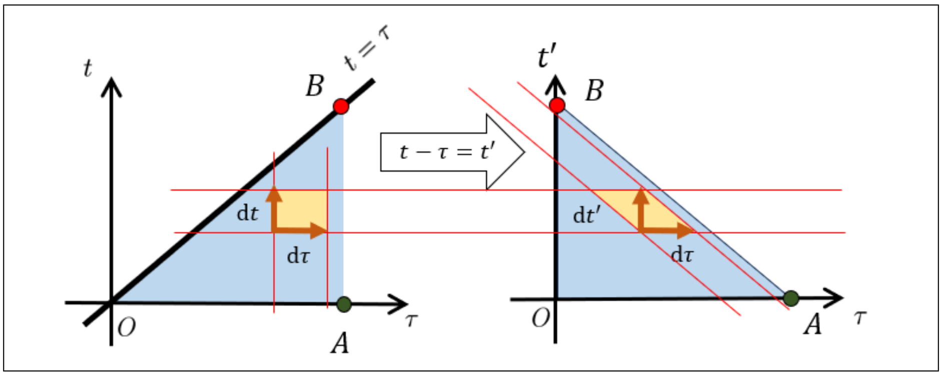

Fig. 9.1: $\mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}t = \mathrm{d}\tau \wedge \mathrm{d}t'$