

第7章 周波数伝達関数モデル → 畳込み積分モデル

7.1 周波数伝達関数モデル → 畳込み積分モデル

第4章ではインパルス応答 $g(t)$ のフーリエ変換 $\hat{g}(\omega)$ を周波数伝達関数と定義した。すなわち

$$\hat{g}(\omega) = \int_{\mathbf{T}} g(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \omega \in \Omega = (-\infty, \infty) \quad (7.1)$$

であった。ここで積分区間は $\mathbf{T} = (-\infty, \infty)$ であるが、 $g(t)$ の因果性、すなわち $g(t) = 0 (t < 0)$ を仮定する。インパルス応答が $g(t)$ でその周波数伝達関数が $\hat{g}(\omega)$ のシステムに正弦波信号 $u(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$ を入力した時の出力 $y(t)$ は、システムが安定であれば過渡応答や初期値応答の影響が0に収束し、十分時間が経過すると定常応答

$$y(t; e^{j\omega t}) = \hat{g}(\omega) e^{j\omega t} \quad (7.2)$$

となることが分かっている。

つぎに、一般的な入力信号を考える。いま入力信号 $u(t)$ の逆ラプラス変換はラプラス変換 $\hat{u}(s)$ を使って

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \hat{u}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.3)$$

とかけるとすると、(7.2) から、この入力に対する出力信号は

$$\begin{aligned} y(t; u(t)) &= y\left(t; \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \hat{u}(\omega) e^{j\omega t} d\omega\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \hat{g}(\omega) \hat{u}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbf{T}} g(\eta) e^{-j\omega \eta} d\eta \right) \left(\int_{\mathbf{T}} u(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \int_{\mathbf{T}} \left(\int_{\mathbf{T}} g(t' - \tau) u(\tau) d\tau \right) e^{j\omega(t' - t)} dt' d\omega \end{aligned} \quad (7.4)$$

ただし $t' = \eta + \tau$ と置いており、 $dt' = d\eta + d\tau$ かつ $d\tau \wedge d\tau = 0$ から $dt' \wedge d\tau = d\eta \wedge d\tau$ に注意されたい。ここで

$$f(t') = \int_{\mathbf{T}} g(t' - \tau) u(\tau) d\tau \quad (7.5)$$

とおくと、上の式は

$$\begin{aligned} y(t; u(t)) &= \int_{\mathbf{T}} f(t') \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} e^{j\omega(t-t')} d\omega dt' \\ &= \int_{\mathbf{T}} f(t') \delta(t - t') dt' \\ &= f(t) \\ &= \int_{\mathbf{T}} g(t - \tau) u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (7.6)$$

となり、畳込み積分モデルが得られる。

7.2 数学的準備

7.2.1 正弦波の正規直交性

フーリエ変換の定義

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{T}} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (7.7)$$

をフーリエ逆変換の式

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7.8)$$

に代入すると

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \int_{\mathbf{T}} f(t') e^{-j\omega t'} dt' e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{\mathbf{T}} f(t') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} e^{j\omega(t-t')} d\omega \right) dt' \end{aligned} \quad (7.9)$$

となる。これより

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} e^{j\omega(t-t')} d\omega = \delta(t - t') \quad (7.10)$$

と見做せることがわかる。逆に、フーリエ逆変換の式をフーリエ変換の式に代入することにより同様にして

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}} e^{j(\omega-\omega')t} dt = \delta(\omega - \omega') \quad (7.11)$$

と見做せることがわかる。