第 5 章　微分方程式モデル $\to$ 伝達関数モデル

5.1　伝達関数の定義

システムの入力信号と出力信号のラプラス変換をそれぞれ $U(s)$,$Y(s)$ とおくと線形時不変システムの場合にはその間に以下のような関係が成立する。

$$Y(s) = Y_0(s) + G(s)U(s) \tag{5.1}$$

ここで $Y_0(s)$ は初期値応答成分 $G(s)U(s)$ は入力応答成分を表し、$G(s)$ を $U(s)$ から $Y(s)$ までの伝達関数と呼ぶ。

5.2　1 階微分方程式 $\to$ 伝達関数

第 1 の 1 階の微分方程式を考える。1 次遅れ系モデル (4.2) の入力信号 $i(t)$ と出力信号 $\Omega(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $I(s)$,$\Omega(s)$ とおく。

$$I(s) = \mathcal{L}[i(t)],\ \ \Omega(s) = \mathcal{L}[\Omega(t)] \tag{5.2}$$

導関数のラプラス変換の公式から

$$\mathcal{L}[\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}(t)] = s\Omega(s) - \Omega(0) \tag{5.3}$$

である。これらを (4.2) に適用すると

$$s\Omega(s) - \Omega(0) = -a\Omega(s) + bI(s) \tag{5.4}$$

となり、これを出力信号 $\Omega(s)$ について解くと

$$\Omega(s) = \frac{\Omega(0)}{s+a} + \frac{b}{s+a}I(s) \tag{5.5}$$

となり、伝達関数は以下のように求まる。

$$G(s) = \frac{b}{s+a} \tag{5.6}$$

5.3　2 階微分方程式 $\to$ 伝達関数

第 2 の 2 階の微分方程式を考える。2 次系モデル (2.4) の入力信号 $f(t)$ と出力信号 $y(t)$ のラプラス変換をそれぞれ $F(s)$,$Y(s)$ とおく。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)],\ \ Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] \tag{5.7}$$

導関数の微分公式から

$$\mathcal{L}[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)] = sY(s) - y(0) \tag{5.8}$$

$$\mathcal{L}[\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) \tag{5.9}$$

である。ここで、$\dot{y}(0)$ は $\mathrm{d}y\mathrm{d}t$ の $t=0$ における値、つまり

$$\dot{y}(0) = \left.\mathrm{d}y\mathrm{d}t\right|_{t=0} \tag{5.10}$$

の略式表記である。
これらを (2.4) に適用すると

$$(s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) = -a_1(sY(s) - y(0)) - a_0Y(s) + bF(s) \tag{5.11}$$

となり、これを出力信号 $Y(s)$ について解くと

$$Y(s) = \frac{(s+a_1)y(0) + \dot{y}(0))}{s^2 + a_1s + a_0} + \frac{b}{s^2 + a_1s + a_0}F(s) \tag{5.12}$$

となり、伝達関数は以下のように求まる。

$$\boxed{G(s) = \frac{b}{s^2 + a_1s + a_0}} \tag{5.13}$$

5.4 第 5 章の数学的準備

5.4.1 フーリエ変換の拡張：ラプラス変換の導入

付録 3 では、フーリエ変換を用いると、時間軸 t の関数である信号 $f(t)$ を角周波数 ω の関数 $\hat{f}(\omega)$ に変換できることを示した。また、付録 1,2 で紹介した周波数伝達関数はインパルス応答のフーリエ変換であることも示した。これにより、システムの特性を周波数領域で特徴づけることが可能である。しかし、フーリエ変換可能な関数には絶対可積分条件が求められる。
絶対可積分の条件とは

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty \tag{5.14}$$

なので、$f(\infty) = f(-\infty) = 0$ でなければならない。これは、制御工学で対象とするような不安定なシステムのインパルス応答やステップ信号、正弦波信号はこのままではフーリエ変換の対象とならないことを意味している。[1]
そこで対象とする信号のクラスを拡張するために以下の $\phi(t)$ を定義し

$$\phi(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\sigma t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{5.15}$$

$f(t)$ に代わって $f(t)\phi(t)$ のフーリエ変換を考える。

$$\mathcal{F}[f(t)\phi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{5.16}$$

σ が適切な値であれば、不安定系のインパルス応答のような発散する $f(t)$ であってもこの広義積分は収束する。
$f(t)\phi(t)$ の値は $t \in (-\infty, 0)$ において 0 であるから積分区間を $(-\infty, \infty)$ から $[0, \infty)$ とし、$s = \sigma + j\omega$ とおいて

[1]超関数的取扱いにより拡張することは可能である

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{5.17}$$

と書くことができる。この式の s は複素周波数、$f(t)$ から $\hat{f}(s)$ への変換はラプラス変換と呼ばれ、以下のように略す。

$$\hat{f}(s) = \mathcal{L}[f(t)] \tag{5.18}$$

5.4.2 導関数のラプラス変換

5.4.3 畳込み積分のラプラス変換

畳込み積分モデルのラプラス変換を考える。

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\int_0^t g(t-\tau)i(\tau)\mathrm{d}\tau\right] = \int_{t=0}^\infty \int_{\tau=0}^t g(t-\tau)i(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_{\tau'=0}^\infty \int_{\tau=0}^\infty g(\tau')i(\tau)\mathrm{e}^{-s(\tau+\tau')}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau' \\
&= \int_{\tau'=0}^\infty g(\tau')\mathrm{e}^{-s\tau'}\mathrm{d}\tau' \int_{\tau=0}^\infty i(\tau)\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \hat{g}(\omega)\hat{i}(\omega)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

整理すると以下の表現が得られる。

$$\hat{\Omega}(s) = \hat{g}(s)\hat{i}(s) \tag{5.20}$$

5.4.4 基本的関数のラプラス変換

	$f(t)$	$F(s)$
インパルス関数	$\delta(t)$	1
ステップ関数	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
ランプ関数	t	$\frac{1}{s^2}$
べき（冪）関数	$\frac{1}{n!}t^n$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
指数関数	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
	$\frac{1}{n!}t^n e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
正弦関数	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
余弦関数	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
減衰振動関数	$\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
減衰振動関数	$\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
行列指数関数	e^{At}	$(sI-A)^{-1}$

5.4.5 ラプラス変換の基本公式

	$f(t)$	$F(s)$
線形性	$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
導関数	$\dot{f}(t)$	$sF(s)-f(0)$
2 階導関数	$\ddot{f}(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-\dot{f}(0)$
n 階導関数	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^k f^{(n-k)}(0)$
初期値定理	$\lim_{t\to 0} f(t)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
最終値定理	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
時間シフト	$f(t-L)$	$e^{-Ls}F(s)$
周波数シフト	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
畳み込み積分	$(f*g)(t)$	$F(s)G(s)$
状態遷移行列	e^{At}	$(sI-A)^{-1}$
状態方程式	$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$	$(sI-A)^{-1}BU(s)$