

第4章 微分方程式モデル, 畳込み積分モデル (フーリエ変換) → 周波数伝達関数モデル

4.1 1階微分方程式 (フーリエ変換) → 周波数伝達関数

第1章で扱った1次遅れ系の微分方程式を考える。

$$\frac{d}{dt}\Omega(t) + a\Omega(t) = bi(t) \quad (4.1)$$

この両辺をフーリエ変換する。 $\mathcal{F}[\Omega(t)] = \hat{\Omega}(\omega)$, $\mathcal{F}[i(t)] = \hat{i}(\omega)$ と標記すると

$$j\omega\hat{\Omega}(\omega) + a\hat{\Omega}(\omega) = b\hat{i}(\omega) \quad (4.2)$$

となる。これを $\hat{\Omega}(\omega)$ について解くと

$$\hat{\Omega}(\omega) = \frac{b}{j\omega + a} \hat{i}(\omega) \quad (4.3)$$

と書くことができる。これは第1章で紹介した周波数伝達関数と一致する。

4.2 畳込み積分モデル (フーリエ変換) → 周波数伝達関数

第1章の畳込み積分モデルを再度示す。

$$\Omega(t) = \Omega(0)e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-\tau)} bi(\tau) d\tau \quad (4.4)$$

左辺のフーリエ変換は $\hat{\Omega}(\omega)$ である。右辺第1項のフーリエ変換は、この式の定義域が $t \in [0, \infty)$ でなので $t \in (-\infty, 0)$ において $\Omega(t) = 0$ であると仮定すると

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\Omega(0)e^{-at}] &= \int_0^\infty \Omega(0)e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \left[-\frac{\Omega(0)}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \right]_{t=0}^\infty = \frac{\Omega(0)}{a + j\omega} \end{aligned} \quad (4.5)$$

右辺第2項のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}\left[\int_0^t e^{-a(t-\tau)} bi(\tau) d\tau\right] \\ &= \int_{t=0}^\infty \int_{\tau=0}^t e^{-a(t-\tau)} bi(\tau) d\tau e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{\tau'=0}^\infty \int_{\tau=0}^\infty e^{-a\tau'} bi(\tau) e^{-j\omega(\tau+\tau')} d\tau d\tau' \\ &= \int_{\tau'=0}^\infty e^{-(a+j\omega)\tau'} b d\tau' \int_{\tau=0}^\infty i(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{b}{a + j\omega} \hat{i}(\omega) \end{aligned} \quad (4.6)$$

となる。つまり

$$\hat{\Omega}(\omega) = \frac{\Omega(0)}{a + j\omega} + \frac{b}{a + j\omega} \hat{i}(\omega) \quad (4.7)$$

となる。

4.3 2階微分方程式 (フーリエ変換) → 周波数伝達関数

第2章で扱った2階の微分方程式の解をフーリエ変換する。(4.22)をもう一度適用すると

$$\mathcal{F} \left[\frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = j\omega \mathcal{F} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = (j\omega)^2 \hat{f}(\omega) = -\omega^2 \hat{f}(\omega) \quad (4.8)$$

となる。これを利用して第2章の微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dt^2}(t) = -a_1 \frac{dy}{dt}(t) - a_0 y(t) + b f(t) \quad (4.9)$$

をフーリエ変換すると

$$(j\omega)^2 \hat{y}(\omega) - a_1(j\omega) \hat{y}(\omega) - a_0 \hat{y}(\omega) + b \hat{f}(\omega) \quad (4.10)$$

を得る。これを $\hat{y}$ について解くと下記のようなになる。

$$\hat{y}(\omega) = \frac{b}{(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0} \hat{f}(\omega) \quad (4.11)$$

4.4 畳込み積分モデル (フーリエ変換) → 周波数伝達関数

(4.2) は一般の畳込み積分モデルにも拡張することができる。畳込み積分モデル (??) の両辺をフーリエ変換する。左辺は $\hat{y}(\omega)$ である。右辺は

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\int_0^t g(t-\tau) i(\tau) d\tau \right] &= \int_{t=0}^{\infty} \int_{\tau=0}^t g(t-\tau) i(\tau) d\tau e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{\tau'=0}^{\infty} \int_{\tau=0}^{\infty} g(t-\tau) i(\tau) e^{-j\omega(\tau+\tau')} d\tau d\tau' \\ &= \int_{\tau'=0}^{\infty} g(\tau') e^{-j\omega\tau'} d\tau' \int_{\tau=0}^{\infty} i(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \hat{g}(\omega) \hat{i}(\omega) \end{aligned} \quad (4.12)$$

整理すると以下の表現が得られる。

$$\hat{\Omega}(\omega) = \hat{g}(\omega) \hat{i}(\omega) \quad (4.13)$$

4.5 インパルス応答 (フーリエ変換) → 周波数伝達関数

よく見ると (4.2) は畳込み積分の定常成分のフーリエ変換であって ω の関数であるが、第 2 章で定義した周波数伝達関数 $\hat{f}(\omega)$ は t の関数である。しかし、これは逆フーリエ変換で説明できる。

フーリエ変換の逆の変換は以下のように書けることが知られている。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.14)$$

これに $f(t) = \Omega(t)$ として (4.13) を代入すると

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) \hat{i}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.15)$$

を得る。ここで $\hat{i}(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega')$ とおいてみる。これは $\omega \in (-\infty, \infty)$ の周波数帯域のなかから $\omega = \omega'$ の周波数成分を抽出することを意味する。ディラックデルタ関数の性質を用いて変形すると

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) (2\pi\delta(\omega - \omega')) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{g}(\omega) e^{j\omega t}) \delta(\omega - \omega') d\omega \\ &= \hat{g}(\omega') e^{j\omega' t} \end{aligned} \quad (4.16)$$

となり一致することがわかる。

4.6 第 4 章の数学的準備

4.6.1 フーリエ変換の定義

フーリエ変換は以下の変換式で定義される。

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.17)$$

この (広義) 積分が意味を持つためには $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ が存在すること (これを絶対可積分という) である。以後この変換式による $f(t)$ から $\hat{f}(\omega)$ への変換を

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] \quad (4.18)$$

と書くことにする。

4.6.2 導関数のフーリエ変換

積の導関数の公式 $((fg))' = f'g + fg'$ から

$$\frac{d}{dt}(f(t)e^{-j\omega t}) = \frac{d}{dt}f(t)e^{-j\omega t} - j\omega f(t)e^{-j\omega t} \quad (4.19)$$

である。この式の両辺を $t \in [t_L, t_H]$ で定積分すると

$$\begin{aligned} & (f(t_H)e^{-j\omega t_H}) - (f(t_L)e^{j\omega t_L}) \\ &= \int_{t_L}^{t_H} \left(\frac{df}{dt} e^{-j\omega t} \right) dt - j\omega \int_{t_L}^{t_H} f(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (4.20)$$

となる。ここで $t_H \rightarrow \infty$ と $t_L \rightarrow -\infty$ のときの極限をとる。絶対可積分の条件から $f(\infty) = f(-\infty) = 0$ なので左辺は 0 に収束する。したがってこの式は

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{df}{dt} e^{-j\omega t} \right) dt - j\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.21)$$

となる。整理すると

$$\mathcal{F} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = j\omega \mathcal{F}[f(t)] = j\omega \hat{f}(\omega) \quad (4.22)$$

と書けることがわかる。これを可換図式で表すと以下のようになる。

$$\begin{array}{ccc} f(t) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{f}(\omega) \\ \frac{d}{dt} \downarrow & & j\omega \times \downarrow \\ \frac{df}{dt} & \xrightarrow{\mathcal{F}} & j\omega \hat{f}(\omega) \end{array} \quad (4.23)$$