第3章　n 階微分方程式モデル $\rightarrow$ 状態空間モデル $\rightarrow$ 畳み込み積分モデル $\rightarrow$ 時間応答

3.1　n 階微分方程式 $\rightarrow$ 状態空間モデル

$u(t)$,$y(t)$ をそれぞれ入力，出力とする 1 入出力系を考える．簡単のため (t) は以後省略する．一般性を持たせるため，y の最高階導関数の係数 a_n は 0 の場合もあり得るものとする（すなわち伝達関数のプロパ性[1]を仮定しない）．n 階微分方程式が以下のように与えられたとする．

$$
\begin{aligned}
&a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+a_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}+\ldots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y\\
&=b_n\frac{d^n u}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+b_{n-2}\frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}}+\ldots+b_1\frac{du}{dt}+b_0u
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

ここで多項式 $A(s), B(s)$ を

$$
\begin{aligned}
A(s)&=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\ldots+a_1s+a_0\\
B(s)&=b_ns^n+b_{n-1}s^{n-1}+b_{n-2}s^{n-2}+\ldots+b_1s+b_0
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

とおくと (3.1) は

$$
A\left(\frac{d}{dt}\right)y(t)=B\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)
\tag{3.3}
$$

と表現することができる．

3.2　制御器正準系

新たな変数 $\eta(t)\in\mathbf{R}$ を用いて (3.3) を

$$
\begin{bmatrix} u(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A\left(\dfrac{d}{dt}\right)\\ B\left(\dfrac{d}{dt}\right)\end{bmatrix}\eta(t)
\tag{3.4}
$$

のように記述する．これを像空間表現 (image representation) という．
ここで，$x_0(t)=\eta(t)$ とおき，$x_1(t)$,$x_2(t)$,…,$x_n(t)$ を

$$
\begin{aligned}
x_1&=\dot{x}_0\\
x_2&=\dot{x}_1=x_0^{(2)}\\
&\ldots\\
x_{n-1}&=\dot{x}_{n-2}=x_0^{(n-1)}\\
x_n&=\dot{x}_{n-1}=x_0^{(n)}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

[1]プロパ性については 11 章を参照.

で定義すると（ここで、$f^{(n)} = d^n f/dt^n$）(3.4) は

$$u(t) = a_n x_n + a_{n-1}x_{n-1} + \ldots + a_2 x_2 + a_1 x_1 + a_0 x_0 \tag{3.6}$$

$$y(t) = b_n x_n + b_{n-1}x_{n-1} + \ldots + b_2 x_2 + b_1 x_1 + b_0 x_0 \tag{3.7}$$

と書ける．ここで $n_D = n+1$ 次元のデスクリプタ変数を

$$x_D = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{n+1} \tag{3.8}$$

のように定義して (3.5)(3.6)(3.7) をまとめるとデスクリプタシステム Σ_{dsys}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \tag{3.9}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

を得る．ここで $a_n = 1, b_n = 0$ の場合には,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{3.11}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

となる．この構造をもつ系を制御器正準系 (controller canonical form) という．これをブロック線図で表すと図 3.1 のようになる．

3.3 観測器正準系

(3.3) は (3.2) の記号を用いてつぎのように表現することも可能である．これを零化空間表現 (kernel representation) という．

$$\begin{bmatrix} A\left(\frac{d}{dt}\right) & -B\left(\frac{d}{dt}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = 0 \tag{3.13}$$

ここで，簡単のために

$$\eta_i = a_i y(t) - b_i u(t), \;\; i = 0, 1, \ldots, n \tag{3.14}$$

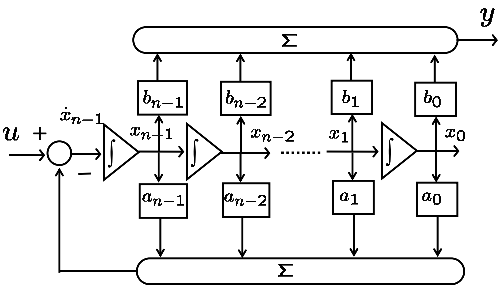

Fig. 3.1: 像空間表現から制御器正準系へ

とおくと上式は

$$\eta_n^{(n)} + \eta_{n-1}^{(n-1)} + \ldots + \eta_1^{(1)} + \eta_0 = 0 \tag{3.15}$$

と書ける．さらにつぎのように $\{\xi_i(t)\}_{i=0}^{n-1}$ を定義することにより連立 1 階微分方程式に変形できる．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\xi_0 + \eta_0 &= 0 \\ \frac{d}{dt}\xi_1 + \eta_1 &= \xi_0 \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}\xi_{n-1} + \eta_{n-1} &= \xi_{n-2} \\ \eta_n &= \xi_{n-1} \end{aligned} \tag{3.16}$$

よって，$n_D = n + 1$ 次元デスクリプタ変数ベクトルを

$$x_D = \begin{bmatrix} \xi_0 & \xi_1 & \ldots & \xi_{n-1} & -y \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{n+1} \tag{3.17}$$

と置くと，次のデスクリプタシステム Σ_{dsys} が得られる．

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ -y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ -y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ -y \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

ここで $a_n = 1, b_n = 0$ の場合には,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_{n-2} \\ \xi_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \dots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_{n-2} \\ \xi_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u(t) \tag{3.20}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_{n-2} \\ \xi_{n-1} \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

となる．この構造の状態空間モデル Σ_{ss} を観測器正準系 (observer canonical form) という．これをブロック線図で表すと図 3.2 のようになる．

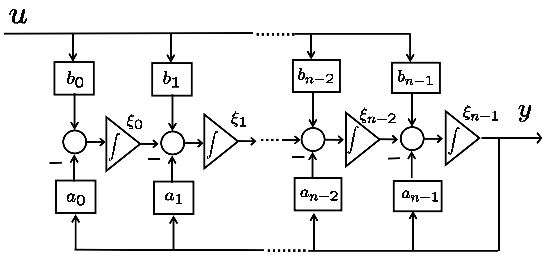

Fig. 3.2: 零化空間表現から観測器正準系へ

3.4 第 3 章の数学的準備

3.4.1 デスクリプタモデル → 状態空間モデル