第2章　機械振動系→ 微分方程式モデル → 状態空間モデル→ 畳み込み積分モデル→ 時間応答

2.1　機械振動系 →2 階微分方程式モデル

Fig.??は、典型的な機械振動系である。固定された壁と質量がスプリングとダンパを介して接続されている。質量の平衡点からの偏位 y[m] を出力とし、質量に加える外力 f[N] とする入出力システムと考える。力学の法則によると、この 2 者の間には下記の平衡条件式が成り立つことが知られている。

$$M\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) + D\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + Ky(t) = f(t) \tag{2.1}$$

ここで M[kg] は質量、$D[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}]$ は粘性摩擦係数、$K[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2]$ は弾性係数である。
第 1 章と同様に、この機械振動系に (i) インパルス入力 $f(t) = \delta(t)$、(ii) ステップ入力 $f(t) = 1(t > 0)$、(iii) 正弦波入力 $f(t) = \sin(\omega t)$ を入力したときの出力 $y(t)$ の値を計算するシステムのシミュレーション問題を考える。

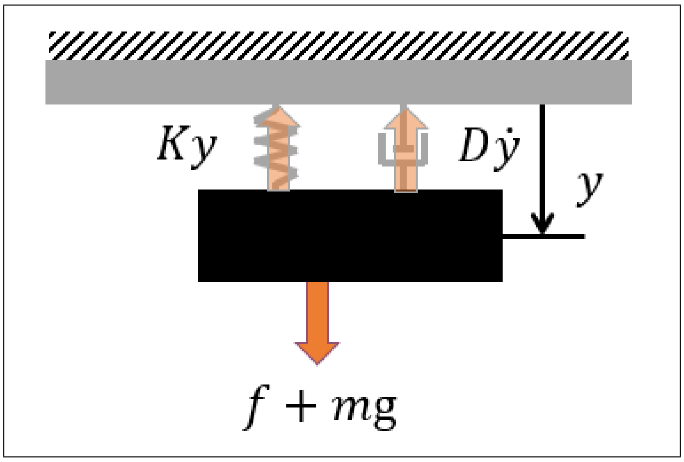

Fig. 2.1: Structure of mechanical osscilatory system

2.2　2 階微分方程式モデル → 状態空間モデル

微分方程式 (2.1) の解は第 1 章と同様に微分積分学や微分方程式の知識を駆使して解くことができる。しかし、煩雑な記号の処理に遭遇することは見えており何らかの工夫が必要である。ここでは状態変数ベクトルを導入して定係数 2 階微分方程式を行列を係数とする 1 階微分方程式に変換してから第 1 章で得た知見を活用して畳込み積分モデルに変換する方法を説明する。

2.2.1 微分方程式の陽表現

まず、微分方程式 (2.1) を最高階導関数の項についての陽表現に変形する。

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\frac{D}{M}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{K}{M}y(t) + \frac{1}{M}f(t) \tag{2.2}$$

さらに、つきのように定数 a_0, a_1, b を定義して (2.2) を以下のように簡素な表現にする。

$$a_0 = \frac{K}{M},\ \ a_1 = \frac{D}{M},\ \ b = \frac{1}{M} \tag{2.3}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) - a_0 y(t) + bf(t)} \tag{2.4}$$

2.2.2 状態変数ベクトルの導入

つぎに 状態変数 x_1, x_2 を

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{x}_1 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{2.5}$$

と置き、これらを成分とする状態変数ベクトルを

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

で定義する。

2.2.3 状態変数ベクトルの導関数

状態変数ベクトルの導関数を各成分の導関数からなるベクトルで定義すると $\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{y}$ なので

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a_1 x_2 - a_0 x_1 + bf \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} f \end{aligned} \tag{2.7}$$

と書くことができる。ここで、係数行列 (A, B, C) を

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix},\ \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.8}$$

と定義すると (2.7) は

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = Ax(t) + Bf(t) \tag{2.9}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{2.10}$$

のように表現することができる。第 1 章で扱った 1 階微分方程式の係数をスカラ量から行列に拡張した行列とベクトルを用いた 1 階微分方程式が得られる。これが、状態空間表現である。特に、(10.1) は状態方程式、(10.2) は出力方程式と呼ばれる。これにより、第 1 章での知見が活かせる。

2.3 状態空間モデル → 畳込み積分モデル

前章の結果をもとに状態空間表現 (10.1)(10.2) からインパルス応答の畳み込み積分モデルを導出する。
(10.1) の両辺に左から e^{-At} を掛けると

$$\mathrm{e}^{-At}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-At}Ax + \mathrm{e}^{-At}Bf \tag{2.11}$$

となる。右辺第 1 項を左辺に移項し、(2.26) を適用すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-At}x(t)\right) = \mathrm{e}^{-At}Bf \tag{2.12}$$

を得る。第 1 章と同様に変数 t を τ に書き換え、$\tau \in [0, t]$ の区間で定積分すると

$$\mathrm{e}^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t \mathrm{e}^{-A\tau}Bf(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.13}$$

となる。左から e^{At} を掛けると

$$x(t) = \mathrm{e}^{At}x(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bf(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.14}$$

となる。さらに左から C を掛けると

$$y(t) = C\mathrm{e}^{At}x(0) + \int_0^t C\mathrm{e}^{A(t-\tau)}Bf(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.15}$$

を得る。これによりインパルス応答

$$g(t) = C\mathrm{e}^{At}B \tag{2.16}$$

とする畳み込み積分モデルが得られる。

2.4 畳込み積分モデル → 時間応答

2.4.1 畳込み積分モデル → ステップ応答

入力がインパルス $f(t) = \delta(t)$ の場合の出力は前節 (2.16) のとおりである。入力がステップ信号 $f(t) = 1(t)$ の場合の出力を求める。(10.3) に $f(t) = 1(t)$ を代入すると出力信号 $y(t)$ は

$$\begin{aligned}
y(t) &= C\mathrm{e}^{At}x(0) + \int_0^t C\mathrm{e}^{A(t-\tau)}B\mathrm{d}\tau \\
&= C\mathrm{e}^{At}x(0) + C\mathrm{e}^{At}\int_0^t \mathrm{e}^{-A\tau}\mathrm{d}\tau B \\
&= C\mathrm{e}^{At}x(0) + C\mathrm{e}^{At}(-A)^{-1}(\mathrm{e}^{-At} - I)B \\
&= C\mathrm{e}^{At}x(0) + CA^{-1}\mathrm{e}^{At}B - CA^{-1}B
\end{aligned} \tag{2.17}$$

となる。この右辺は第 1 章で見たと同様に、初期値応答、過渡応答、定常応答の和になっている。
(2.7) から定常ゲインは

$$-CA^{-1}B = -\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 \\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 \\ b\end{bmatrix} = \frac{b}{a_0} \tag{2.18}$$

となる。

2.4.2 畳込み積分モデル → 正弦波応答

入力に正弦波を複素数に拡張した複素正弦波 $f(t)=\mathrm{e}^{j\omega t}$ を印加した場合の出力 y を求める。(10.3) に $f(\tau)=\mathrm{e}^{j\omega\tau}$ を代入すると出力信号 $y(t)$ は

$$\begin{aligned} y(t) &= C\mathrm{e}^{At}x(0)+\int_0^t C\mathrm{e}^{A(t-\tau)}B\mathrm{e}^{j\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= C\mathrm{e}^{At}x(0)+C\mathrm{e}^{At}\int_0^t \mathrm{e}^{(j\omega I-A)\tau}\mathrm{d}\tau B \\ &= C\mathrm{e}^{At}x(0)+C\mathrm{e}^{At}(j\omega I-A)^{-1}(\mathrm{e}^{(j\omega I-A)t}-I)B \\ &= C\mathrm{e}^{At}x(0)-C(j\omega I-A)^{-1}\mathrm{e}^{At}B \\ &\quad +C(j\omega I-A)^{-1}B\mathrm{e}^{j\omega t} \end{aligned} \tag{2.19}$$

となる。この右辺は第 1 章で見たと同様に、初期値応答、過渡応答、定常応答の和になっている。この $y(t)$ は複素数に拡張された表現であるが、実数部は入力信号 $f(t)=\cos(\omega t)$ に対応する出力、虚数部は入力信号 $f(t)=\sin(\omega t)$ に対応する出力である。

2.5 第 2 章の数学的準備

2.5.1 行列指数関数

スカラ変数 $x\in\mathbb{R}$ の指数関数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ のテーラー展開は

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \tag{2.20}$$

である。ここでスカラ変数 x を n 次正方行列 $X\in\mathbb{R}^{n\times n}$ に形式的に拡張した関数

$$\mathrm{e}^X=I+X+\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{3!}X^3+\cdots+\frac{1}{n!}X^n+\cdots \tag{2.21}$$

を行列指数関数と呼ぶ。ここで $I\in\mathbb{R}^{n\times n}$ は n 次の単位行列である。行列指数関数の下記の性質は線形代数学の基礎的な知識（例えば、相似変換による行列の対角化など）により容易に確認することができる。

$$\mathrm{e}^X\big|_{X=0}=I \tag{2.22}$$

$$\mathrm{e}^X\mathrm{e}^{-X}=I \tag{2.23}$$

さらに、$X=At$ のように定数行列 A のスカラ変数倍で表現できる場合には

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{At}=A\mathrm{e}^{At}=\mathrm{e}^{At}A \tag{2.24}$$

$$\mathrm{e}^{At_1}\mathrm{e}^{At_2}=\mathrm{e}^{A(t_1+t_2)} \tag{2.25}$$

が成り立つ。
特に、(2.24) と積の導関数の公式から

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-At}x(t)\right)=-\mathrm{e}^{-At}Ax(t)+\mathrm{e}^{-At}\dot{x}(t) \tag{2.26}$$

となることに注意いただきたい。