

第1章 DCサーボモータ → 微分方程式モデル → 畳み込み積分モデル → 時間応答

1.1 DCサーボモータ → 1階微分方程式

Fig.1.1 の左は DC サーボモータの内部構造を表している。コイルを持つ回転子 (rotor) は、永久磁石を持つ固定子 (stator) に対して機械的に回転できるように図の中心廻りに軸受けなどで支えられている。固定子側のブラシ (brush) から回転子のコイルに整流子 (commutator) を介して電流が供給される。供給された電流により回転子のコイルが磁化され、永久磁石との間の反発力および吸引力により回転子にトルクが発生するしくみになっている。この振舞いを抽象化すると、電気エネルギーが運動エネルギーに変換されると言える。これを同右図のように回転子のコイル電流 i [A] を入力信号、回転子の回転角速度 $\Omega(t)$ [rad/s] を出力信号とする信号変換のシステムと考える。その変換には自然法則 (natural law) があり、電磁気学と力学の知識を用いると以下の微分方程式を得る。

$$J \frac{d}{dt} \Omega(t) + D \Omega(t) = K i(t) \quad (1.1)$$

ここで J [kg m²] は回転子の慣性モーメント、 D [kg m²/s] は回転子と固定子の間の摩擦係数、 K [kg m²/s²/A] は電流とトルクの変換係数である。

この単純なシステムに (i) インパルス入力 $i(t) = \delta(t)$ 、(ii) ステップ入力 $i(t) = 1(t > 0)$ 、(iii) 正弦波入力 $i(t) = \sin(\omega t)$ などいろいろな波形の入力を与えたときの出力 $\Omega(t)$ の値を計算する問題を考える。すなわち、このシステムのシミュレーションをする。

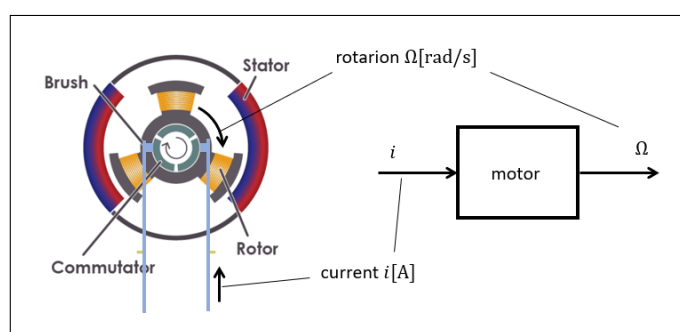


Fig. 1.1: Structure of DC motor as an input/output system

1.2 1階微分方程式 (高校数学:その1) → 畳み込み積分モデル

$$a = \frac{D}{J} \quad b = \frac{K}{J} \quad (1.2)$$

のように定義した定数 a, b を用いると (1.1) を J で割った式は

$$\frac{d}{dt}\Omega(t) + a\Omega(t) = bi(t) \quad (1.3)$$

と書ける。以後 (1.1) の代わりに (1.3) の記号を用いて解を導出する。

(1.3) は微分積分学や微分方程式のテキストでは「定係数非斉次 1 階微分方程式」として頻出する微分方程式である。そこでは、まず特殊解を求め、それを利用して一般解を求める 2 段階の解法がよく照会されている。

1.2.1 特殊解

まず、 $i = 0$ という特殊な場合の解を求める。変数分離法を用いると

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = -adt \quad (1.4)$$

と書ける。変数 t を τ に書き換え、 $\tau \in [0, t]$ の区間で定積分すると

$$\log_e \Omega(t) - \log_e \Omega(0) = -at \quad (1.5)$$

となり微分方程式 (1.4) の解

$$\Omega(t) = \Omega(0)e^{-at} \quad (1.6)$$

を得る。

1.2.2 一般解

つぎに (1.6) の $\Omega(0)$ を $C(t)$ に置き換えた

$$\Omega(t) = C(t)e^{-at} \quad (1.7)$$

を (1.1) に代入し、積の導関数の公式 $((fg)' = f'g + fg')$ を用いて展開すると

$$\frac{dC(t)}{dt}e^{-at} + C(t)(-a)e^{-at} + aC(t)e^{-at} = bi(t) \quad (1.8)$$

となる。第 2 項と第 3 項は相殺し 0 となるので (1.8) は

$$\frac{dC}{dt}e^{-at} = bi(t) \quad (1.9)$$

となる。これを

$$\frac{dC}{dt} = e^{at}bi(t) \quad (1.10)$$

と変形し、変数 t を τ に書き換え $\tau \in [0, t]$ の区間で定積分すると

$$C(t) = C(0) + \int_0^t e^{a\tau}bi(\tau)d\tau \quad (1.11)$$

を得る。これを (1.7) に代入すると

$$\Omega(t) = \Omega(0)e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-\tau)}bi(\tau)d\tau \quad (1.12)$$

これはインパルス応答の畳込み積分モデルにおいて

$$g(t) = e^{-at}b = \frac{K}{J}e^{-\frac{D}{J}t} \quad (1.13)$$

$$\int_{-\infty}^0 g(t-\tau)i(\tau)d\tau = \Omega(0)e^{-at} \quad (1.14)$$

とおいた場合に対応する。

1.3 1 階微分方程式 (高校数学:その2) → 畳み込み積分モデル

少々作作的ではあるが以下の積の導関数の公式 $((fg)' = f'g + fg')$ を用いた解法は知っておくと便利である。

(1.3) の両辺に e^{at} を掛けると以下の式を得る。

$$\frac{d}{dt}\Omega(t)e^{at} + a\Omega(t)e^{at} = bi(t)e^{at} \quad (1.15)$$

$f = \Omega(t), g = e^{at}$ とおけば左辺は $f'g + fg'$ と書けるので、積の導関数の公式を用いて以下のようにまとめることができる。

$$\frac{d}{dt}(\Omega(t)e^{at}) = e^{at}bi(t) \quad (1.16)$$

変数 t を τ に書き換えて、0 から t まで定積分すると

$$\Omega(t)e^{at} - \Omega(0) = \int_0^t e^{a\tau}bi(\tau)d\tau \quad (1.17)$$

となる。さらに両辺に e^{-at} をかけて整理すると (1.12) を得る。

1.4 畳み込み積分 → 時間応答

さっそく求めた微分方程式の解を使って応答波形を求める。インパルス応答とステップ応答は簡単な計算で求まる。

1.4.1 畳み込み積分 → インパルス応答

インパルス応答は $\Omega(0) = 0$ 、 $i(t) = \delta(t)$ (ディラックのデルタ関数) とおいて求まる。

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= 0 \cdot e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-\tau)}b\delta(\tau)d\tau \\ &= e^{-at}b = \frac{K}{J}e^{-at} \end{aligned} \quad (1.18)$$

1.4.2 畳み込み積分 → ステップ応答

ステップ応答は $\Omega(0) = 0$ 、 $i(t) = 1(t > 0)$ とおいて求まる。

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= 0 \cdot e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-\tau)}bd\tau \\ &= (1 - e^{-at})\frac{b}{a} = \frac{K}{D}(1 - e^{-at}) \end{aligned} \quad (1.19)$$

1.4.3 畳込み積分 (高校数学) → 正弦波応答

つぎに $\Omega(0) = 0$ 、 $i(t) = \sin(\omega t)$ とおいたときの $\Omega(t)$ を求める。(1.12) に代入すると

$$\Omega(t) = \Omega(0)e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-\tau)} b \sin(\omega \tau) d\tau \quad (1.20)$$

ここで、積の導関数の公式 $((fg)' = f'g + fg')$ から導かれる公式

$$e^{at} \sin(\omega t) = \frac{1}{a^2 + \omega^2} (a(e^{at} \sin(\omega t))' - \omega(e^{at} \cos(\omega t))') \quad (1.21)$$

を用いると

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \Omega(0)e^{-at} \\ &+ \frac{be^{-at}}{a^2 + \omega^2} (a(e^{at} \sin(\omega t)) - \omega(e^{at} \cos(\omega t) - 1)) \end{aligned} \quad (1.22)$$

となる。ここで ϕ を

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{a} \right) \quad (1.23)$$

とおくと出力 $\Omega(t)$ は以下のように 3 種類の信号の和であることがわかる。

$$\Omega(t) = \Omega(0)e^{-at} \quad (1.24)$$

$$+ \frac{b\omega}{a^2 + \omega^2} e^{-at} \quad (1.25)$$

$$+ \frac{b}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \phi) \quad (1.26)$$

(1.24)-(1.26) はそれぞれ、初期値応答 (initial value response)、過渡応答 (transient response)、定常応答 (steady state response) と呼ばれる。

1.4.4 畳込み積分 (オイラーの等式) → 正弦波応答

つぎに入力信号を $i(t) = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) = e^{j\omega t}$ と複素数に拡張したときの $\Omega(t)$ を求める。(1.12) にこれを代入すると

$$\Omega(t) = \Omega(0)e^{-at} + k \int_0^t e^{-a(t-\tau)} e^{j\omega \tau} d\tau \quad (1.27)$$

$$= \Omega(0)e^{-at} + ke^{-at} \int_0^t e^{(j\omega + a)\tau} d\tau \quad (1.28)$$

$$= \Omega(0)e^{-at} + ke^{-at} (j\omega + a)^{-1} (e^{(j\omega + a)t} - 1) \quad (1.29)$$

$$= \Omega(0)e^{-at} - \frac{k}{j\omega + a} e^{-at} + \frac{k}{j\omega + a} e^{j\omega t} \quad (1.30)$$

(1.24)-(1.26) と同様に (1.30) は、初期値応答、過渡応答、定常応答の和になっている。定常応答だけに着目したつぎの式は周波数伝達関数の定義式である。

$$\Omega(t) = \frac{k}{j\omega + a} e^{j\omega t} \quad (1.31)$$

この虚数部を抜き出すと (1.25)(1.26) が得られることは容易にわかる。

1.4.5 正弦波応答 → 周波数伝達関数

前節において、初期値応答成分と過渡応答成分は $a = \frac{D}{J} > 0$ の場合には十分時間が経過すると 0 に収束し、入出力関係は定常応答成分だけで表現できる。入力信号に $\sin(\omega t), \cos(\omega t)$ を印加したときの定常出力をそれぞれ Ω_s, Ω_c とおくと

$$\Omega_s(t) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \phi) \quad (1.32)$$

$$\Omega_c(t) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \cos(\omega t - \phi) \quad (1.33)$$

となる。これをオイラーの等式を使って複素数に拡張する、すなわち第 2 式を $j(= \sqrt{-1})$ 倍して第 1 式に加えると

$$\Omega(t) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} e^{j\omega t - \phi} \quad (1.34)$$

$$= \frac{b}{a + j\omega} e^{j\omega t} \quad (1.35)$$

のように書ける。すなわち入力 $i(t) = e^{j\omega t}$ と出力 $\Omega(t)$ の関係は

$$\Omega(t) = G_f(j\omega) e^{j\omega t} \quad (1.36)$$

$$G_f(j\omega) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + j\omega}} \quad (1.37)$$

と書ける。この $G_f(j\omega)$ は周波数伝達関数 (frequency transfer function) と呼ばれる。以下のように用語を定義する。

$$|G_f(j\omega)| = \frac{K}{J} \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} : \text{ゲイン (利得: gain)}$$

$$-\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{\omega}{a} \right) : \text{位相 (phase)}$$

$e^{j\omega t}$ を、原点を中心とする単位円の円周を反時計回りに周回する点の座標と考えると、 $G_f(j\omega) e^{j\omega t}$ はゲイン倍の半径を持つ円周上を $\phi[\text{rad}]$ だけ遅れて周回する点を表していると考えることができる。

このように時間軸上の正弦波を複素数に拡張することによって、ゲインだけでなく位相も考慮した考察が容易になることは興味深いことである。

1.5 第 1 章の数学的準備

1.5.1 微分、導関数

定義として覚える。

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) \quad (1.38)$$

1.5.2 積の導関数

2 つの関数 $f(x), g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ の導関数の公式

$$(fg)' = f'g + fg' \quad (1.39)$$

を、定義に戻って確認する。(1.39) の左辺は

$$(fg)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \quad (1.40)$$

である。この式の $\lim$ の中に着目すると

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} \\
 &= \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\
 &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &\rightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (h \rightarrow 0)
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

となる。

公式 (1.39) の両辺を区間 $[a, b]$ で定積分すると

$$[fg]_a^b = \int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx \tag{1.42}$$

となるが、これを並べ替えると部分積分の公式となる。

$$\int_a^b f'g dx = [fg]_a^b - \int_a^b fg' dx \tag{1.43}$$

つまり部分積分の公式は積の微分公式の積分表現である。

1.5.3 指数関数の基本的性質

$$(e^{ax})' = ae^{ax}, \quad \int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C \tag{1.44}$$

$$e^{ax}|_{x=0} = 1 \tag{1.45}$$

$$e^{ax}e^{ay} = e^{a(x+y)} \tag{1.46}$$

$$e^{ax}e^{-ax} = 1 \tag{1.47}$$

これらは独立な公式ではないが、この形式で頻出するので覚えておくこと。

1.5.4 変数分離形

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{1.48}$$

は

$$\int f(x) dx = \int \frac{1}{g(y)} dy + C \tag{1.49}$$

のように x に関する積分と y に関する積分に分離できる。

1.5.5 $\frac{1}{x}$ の積分

$$\int \frac{1}{x} dx = \log_e x + C \tag{1.50}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log_e |f(x)| + C \tag{1.51}$$

1.5.6 ディラックのデルタ関数

ディラックデルタ (Dirac's delta function) は

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0) \quad (1.52)$$

で定義される超関数である。写像として定義される通常関数とは異なり、積分演算を伴って初めて意味を持つことに注意されたい。

工学的には、通常関数の極限として定義することができる。たとえば

$$\delta_{\Delta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & 0 < x < \Delta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1.53)$$

は任意のなめらかな関数 $f(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_{\Delta}(x)dx = \frac{1}{\Delta} \int_0^{\Delta} f(x)dx \rightarrow f(0) \quad (\Delta \rightarrow 0) \quad (1.54)$$

となり、ディラックのデルタ関数と同等の性質を持つ。

1.5.7 オイラーの等式

$$e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x) \quad (1.55)$$

この公式の証明としてテイラー展開による説明がよく見られるが、 $(\sin(x))' = \cos(x)$ と $(\cos(x))' = -\sin(x)$ および前出の指数関数の性質から証明する方法を紹介する。

$f(x) = \cos(x) + j \sin(x)$ とおく。以下の性質は容易に確認できる。

$$f(0) = \cos(0) + j \sin(0) = 1 \quad (1.56)$$

$$|f(x)| = \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)} = 1 \neq 0 \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos(x) + j \sin(x))' \\ &= -\sin(x) + j \cos(x) \\ &= j(j \sin(x) + \cos(x)) \\ &= jf(x) \end{aligned} \quad (1.58)$$

ここで $f(x) \neq 0$ なので (1.58) より

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = j \quad (1.59)$$

である。これを区間 $(0, x)$ で定積分すると

$$\log_e |f(x)| - \log_e |f(0)| = jx \quad (1.60)$$

となり (1.56) の $f(0) = 1$ より

$$f(x) = e^{jx} \quad (1.61)$$

を得る。