# 基礎制御工学および演習 (第 12 回)

| | |
|---|---|
| | 2015 年 12 月 15 日　実施 |
| 学籍番号　15FR999 | 氏名　かいとう れいこ |

【1 次チェック】

| 回 | チェック日 | チェック者（氏名） | 判定 |
|---|---|---|---|
| 1-1 | 月　　日 | （TA, 受講生） | （合格、再提出） |
| 1-2 | 月　　日 | （TA, 受講生） | （合格、再提出） |
| 1-3 | 月　　日 | （TA, 受講生） | （合格、再提出） |

【2 次チェック】

| 回 | チェック日 | チェック者（氏名） | 判定 |
|---|---|---|---|
| 2-1 | 月　　日 | shoo | （合格、再提出） |
| 2-2 | 月　　日 | | （合格、再提出） |

実施要領

[標準フロー]

1. 演習プリントを受け取ったら，まず学籍番号と氏名を記入する．
2. 演習時間内に全問解答し、副手または担当教員の指名する 1 次チェック担当者による 1 次チェックを受ける．
3. 全問正解状態になるまで 不正解問題の理解、答案修正、 1 次チェックを繰り返す．
4. 1 次チェックが完了し 全問正解状態になったら 指導教員の 2 次チェックを受ける。
5. 2 次チェックが完了し「合格」印を受けると他の受講生の 1 次チェック担当に指名されることがある。
6. 2 次チェック完了答案は演習時間終了時に提出する。次回の演習開始時に返却される。
7. 演習時間内に 1 次および 2 次チェックが完了しなかった者については、別途指示する。
8. 解答済演習プリントは大切に保管し、学期末にポートフォリオとして整理し提出する．

[質問受付け] 授業担当は汐月（11016A 室）、井上（11001A 室）。
担当副手は 根本 (岩)、＊和久井 (汐)、満渕 (鈴)、＊倉持 (汐)、千脇 (汐)、齋藤 (畠) です。
（岩）=10424 室、（畠）=10425 室、（汐）=10426 室、（鈴）=11003 室

## 1. 導関数を求める

以下の関数の導関数を微分の定義から導出せよ．

(1-1)

平均変化率

$$f(x) = x^2 - 2x$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\{(x+h)^2 - 2(x+h)\} - (x^2 - 2x)}{h} = 2x + h - 2$$

よって導関数

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} (2x + h - 2) = \underline{2x - 2}$$

となる。

(1-2)

平均変化率は

$$f(x) = x^3$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2 + O(h)$$

となる。よって導関数は

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 3x^2$$

となる。

(1-3)

$$f(x) = \sin(x)$$

ただし，$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ ，$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$ を用いてもよい．

平均変化率は

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x) \cdot \sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$= \sin(x) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h}$$

となる。よって導関数は

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \sin(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

$$= \sin(x) \times 0 + \cos(x) \times 1 = \underline{\cos(x)}$$

## 2. 指数関数の復習

(2-1) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x$ を用いてつぎの等式を説明せよ．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{at} = ae^{at} = e^{at}a$$

$x = at$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = a$ なので

$\dfrac{d}{dt}e^{at} = \dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{de^x}{dx} = a\cdot e^{at}$

スカラの掛け算は交換可能なので

$\dfrac{d}{dt}e^{at} = \dfrac{de^x}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = e^{at}\cdot a$

も成り立つ。

(2-2) $e^{x+y} = e^x e^y$ を用いてつぎの等式を説明せよ．

$$e^{-at} = \frac{1}{e^{at}}$$

$x = at,\ y = -at$ とおくと

$e^{x+y} = e^{((at)+(-at))} = e^0 = 1$

$e^x\cdot e^y = e^{at}\cdot e^{-at}$

ゆえに $e^{at}\cdot e^{-at} = 1$

つまり $e^{-at} = \dfrac{1}{e^{at}}$ である。

## 3. 微分方程式の解

つぎの式を $a = 0.5, b = 1, x_0 = 0, u(t) = 1$ の条件で解き，概形を余白に描け．

$$x(t) = e^{-at}x_0 + \int_0^t e^{-a(t-\tau)}bu(\tau)\mathrm{d}\tau$$

問題文中の数値を代入すると

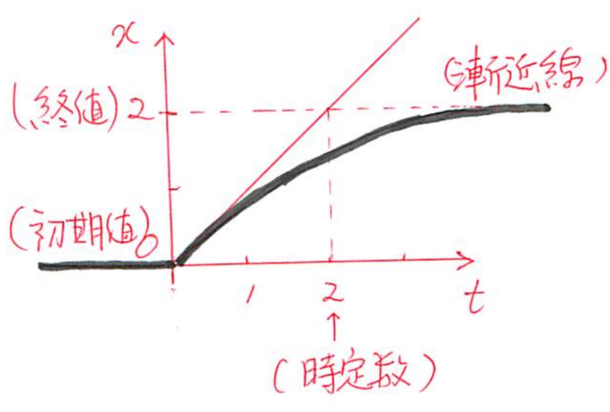
$x(t) = e^{-0.5t}\times 0 + \int_0^t e^{-0.5(t-\tau)}\cdot 1\cdot d\tau$

$= \int_0^t e^{0.5(\tau-t)}d\tau$

$= 2\left[e^{0.5(\tau-t)}\right]_0^t$

$= 2(e^0 - e^{-0.5t})$

$= 2(1 - e^{-\frac{1}{2}t})$



# 4.MaTX による微分方程式の近似解の計算

以下のプログラムを MaTX で実行し，表示されるグラフの概形を余白に描け.

1 階の微分方程式の近似解の計算　diff_1order.mm

```
Func void main()
{
  Real t,x,x1,u,h;
  Real a,b;
  Array tarray,xarray;
  Integer i,N;

  a = 0.5;
  b = 1.0;

  h = 0.05;
  tarray = [-2.0:h:8.0];
  N = length(tarray);
  xarray = Z(1,N);
  x = 0.0;
  u = 0.0;
  for(i=1; i<=N; i++) {
    t = tarray(1,i);
    if( t > 0 ) { u = 1.0; }
    xarray(1,i) = x;
    x1 = x + h*(-a*x + b*u);
    x = x1;
  }
  mgplot_grid(1);
  mgplot_yrange(1,-0.5,2.5);
  mgplot_xlabel(1,"time t[sec]");
  mgplot_ylabel(1,"response x[-]");
  mgplot_title(1,"1st order differential equation");
  mgplot(1, tarray, xarray,
               {"x"},
               {"linewidth 3.0"});
  mgreplot(1, [-2 8],[0 0],{""}, {"linewidth 1.0"});
  mgreplot(1, [0 0],[-0.5 2.5],{""}, {"linewidth 1.0"});
}
main
```

## 1. 導関数を求める (追加)

以下の関数の導関数を微分の定義から導出せよ.

(1-4)

$$f(x) = e^x$$

ただし, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ を用いてもよい.

平均変化率は

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h}$$

ここで

$$e^h - 1 = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nh} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)\cdot nh + \frac{nh(nh-1)}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{nh(nh-1)(nh-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots\right\}$$

よって

$$= h\left(1 + \frac{h}{2} + \frac{1}{6}h^2 + \cdots\right) = h(1 + O(h))$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = e^x \cdot \lim_{h\to 0}(1+O(h)) = \underline{e^x} \text{//}$$

(1-5)

$$h(x) = f(x)g(x)$$

平均変化率は

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) - f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

よって

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \underline{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)} \text{//}$$

(1-6)

$$h(x) = \int_0^x e^{-ax} f(t)\mathrm{d}t$$

平均変化率は

$$h(x+h) - h(x) = \int_x^{x+h} e^{-a(x+h)} f(t)dt + \int_0^x e^{-ax}(e^{-ah} - 1)f(t)dt$$

なので

$$\frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} e^{-a(x+h)} f(t)dt - a\cdot\frac{e^{-ah} - 1}{-ah}\int_0^x e^{-ax} f(t)dt$$

よって

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta h}{\Delta x} = \underline{e^{-ax}f(x) - ah(x)} \text{//}$$

となる。