基礎制御工学および演習 (第9回)

	2015年11月24日　実施
学籍番号　15FR999	氏名　かいとう れいこ

【1次チェック】

回	チェック日	チェック者（氏名）	判定
1-1	月　　日	（TA, 受講生）	（合格、再提出）
1-2	月　　日	（TA, 受講生）	（合格、再提出）
1-3	月　　日	（TA, 受講生）	（合格、再提出）

【2次チェック】

回	チェック日	チェック者（氏名）	判定
2-1	月　　日		（合格、再提出）
2-2	月　　日		（合格、再提出）

実施要領
[標準フロー]

1. 演習プリントを受け取ったら，まず学籍番号と氏名を記入する.
2. 演習時間内に全問解答し、副手または担当教員の指名する1次チェック担当者による1次チェックを受ける.
3. 全問正解状態になるまで不正解問題の理解、答案修正、1次チェックを繰り返す.
4. 1次チェックが完了し全問正解状態になったら指導教員の2次チェックを受ける。
5. 2次チェックが完了し「合格」印を受けると他の受講生の1次チェック担当に指名されることがある。
6. 2次チェック完了答案は演習時間終了時に提出する。次回の演習開始時に返却される。
7. 演習時間内に1次および2次チェックが完了しなかった者については、別途指示する。
8. 解答済演習プリントは大切に保管し、学期末にポートフォリオとして整理し提出する.

[質問受付け] 授業担当は汐月（11016A室)、井上（11001A室)。
担当副手は 根本(岩)、＊和久井(汐)、満渕(鈴)、＊倉持(汐)、千脇(汐)、齋藤(畠)です。
（岩）=10424室、（畠）=10425室、（汐）=10426室、（鈴）=11003室

問題1 次の問いに答えよ.

(1-1) 関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ の定義式を書け.

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad \left(= \mathcal{L}[f(t)] \right)$$

 とも書く

(1-2) $f(t)$ の導関数 $\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ のラプラス変換を $F(s)$ と $f(0)$ を用いて表現せよ。

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

(1-3) $f(t)$ の2階導関数 $\dfrac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}$ のラプラス変換を $F(s)$ と $f(0), \dot{f}(0)$ を用いて表現せよ。ただし、$\dot{f}(0)$ は導関数 $\dot{f}(t)$ の $t=0$ における値を表すこととする。

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt}\right] = s\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] - \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0}$$

$$= s(sF(s) - f(0)) - \dot{f}(0)$$

$$= s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

(1-4) 関数 $g(t) = e^{-at}b$ のラプラス変換 $G(s)$ を定義に基づいて導出せよ.

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-at} b\, e^{-st} dt = b\int_0^\infty e^{-(s+a)t} dt$$

$$= -\frac{b}{s+a}\left[e^{-(s+a)t}\right]_0^\infty$$

$$= -\frac{b}{s+a}(0-1) = \underline{\frac{b}{s+a}}$$

問題 2 下記のラプラス変換に関する表を完成せよ．

	$f(t)$	$F(s)$
ディラックデルタ（インパルス）	$\delta(t)$	1
ステップ関数 (インデシャル)	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
ランプ関数	t	$\frac{1}{s^2}$
べき（冪）関数	$\frac{1}{n!}t^n$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
指数関数	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
	$\frac{1}{n!}t^n e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
シヌソイド関数（正弦関数）	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
シヌソイド関数（余弦関数）	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
減衰振動関数	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
減衰振動関数	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

	$f(t)$	$F(s)$
線形性	$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
導関数	$\dot{f}(t)$	$sF(s)-f(0)$
2 階導関数	$\ddot{f}(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-\dot{f}(0)$
n 階導関数	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k)}(0)$
初期値定理	$\lim_{t\to 0} f(t)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
最終値定理	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
時間シフト	$f(t-L)$	$e^{-Ls}F(s)$
周波数シフト	$e^{-at}f(t)$	$F(s+a)$
畳み込み積分	$(f*g)(t)$	$F(s)\cdot G(s)$
状態遷移行列	e^{At}	$(sI-A)^{-1}$
状態方程式	$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$	$(sI-A)^{-1}BU(s)$

問題3 次の微分方程式をラプラス変換を用いて解け。

(3-1)

$$\dot{x}(t) + 2x(t) = 0, \quad x(0) = 3$$

$$(sX(s) - 3) + 2X(s) = 0$$

$$X(s) = \frac{3}{s+2}$$

$$x(t) = 3e^{-2t}$$

(3-2)

$$\dot{x}(t) + 3x(t) = 2, \quad x(0) = 1$$

(解1) $(sX(s) - 1) + 3X(s) = \frac{2}{s}$

$$X(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{2}{s(s+3)} \quad \cdots ①$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{s} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{s+3}$$

$$x(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{-3t}$$

(解2) ①まで共通

$$x(t) = e^{-3t} + 2(t) * e^{-3t}$$

$$= e^{-3t} + 2\int_0^t e^{-3\tau} d\tau$$

$$= e^{-3t} - \frac{2}{3}\left[e^{-3\tau}\right]_0^t$$

$$= e^{-3t} - \frac{2}{3}(e^{-3t} - 1)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} e^{-3t}$$

(3-3)

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0, \quad x(0) = 1, \ \dot{x}(0) = 1,$$

$(s^2 + 3s + 2)X(s) = s + 4$ より $X(s) = \dfrac{s+4}{s^2+3s+2} = \dfrac{s+4}{(s+1)(s+2)}$

(解1)

$$X(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

①留数定理
②通分＋連立方程式

よって

$$x(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t}$$

(解2)

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{3}{s+1} \times \frac{1}{s+2}$$

$$x(t) = e^{-2t} + 3e^{-t} * e^{-2t}$$

$$= e^{-2t} + 3\int_0^t e^{-(t-\tau)} \cdot e^{-2\tau} d\tau = 3e^{-t}\int_0^t e^{-\tau} d\tau$$

$$= e^{-2t} + 3e^{-t}\left[-e^{-\tau}\right]_0^t$$

$$= e^{-2t} + 3e^{-t}(-e^{-t} + 1)$$

$$= 3e^{-t} - 2e^{-2t}$$

(解2)′

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

$$x(t) = e^{-t} + 2 \cdot e^{-t} * e^{-2t}$$

$$= e^{-t} + 2e^{-t}(-e^{-t} + 1)$$

$$= 3e^{-t} - 2e^{-2t}$$