基礎制御工学および演習 (中間試験) 2の1

	2015 年 11 月 17 日　実施	
学籍番号　15FR999	氏名 かいとう れいこ	点数

試験時間は　9 時 00 分〜10 時 20 分（80 分）/ テキスト，ノート，資料 持ち込み不可/ 電卓持ち込み可

問題１：定義

次の各問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の根が $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ となることを平方完成（完全平方）を使って説明せよ。

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = 0$$

$$a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\} + c = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(2) ネイピア数 e の定義を示せ。また、その値をできるだけ正確な数値で表せ。

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{または} \quad e = \lim_{h \to 0}(1 + h)^{\frac{1}{h}}$$

$e = 2.718281828459045\cdots$　　※ h と n を明確に区別せよ

(3) 時計の秒針、分針、時針の回転角速度を単位 [rad/s] 有効数字 4 桁の数値で表せ。

秒針 $-\dfrac{2\pi}{60} \fallingdotseq -1.047 \times 10^{-1}$ rad/s

分針 $-\dfrac{2\pi}{60 \times 60} \fallingdotseq -1.745 \times 10^{-3}$ rad/s

時針 $-\dfrac{2\pi}{60 \times 60 \times 12} \fallingdotseq -1.454 \times 10^{-4}$ rad/s

(4) 関数 $f(t)$ のラプラス変換の定義式を書け。

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

(5) 関数 $f(t)$ と $g(t)$ の畳み込み積分の定義式を書け。ただし，$f(t) = 0, g(t) = 0, t < 0$ とする。

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\ ) g(t - \tau) d\tau = \int_{\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

積分区間は $-\infty \sim t$ ，$0 \sim t$ でもよい。

(6) 振幅 50mV の正弦波をゲイン 40dB の理想的な増幅器に入力すると出力の振幅は何ボルトになるか答えよ。

$20 \log_{10} X = 40$ より $X = 10^{\frac{40}{20}} = 10^2 = 100$

よって $50\,mV \times 100 = 5000\,mV = \underline{5.0V}$ //

(7) 100[rad] は n 回転+θ[rad] である。このときの n と θ を求めよ。ただし、n は正整数である。また θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす小数（小数点以下 3 桁）で答えよ。

$100 - 30\pi \fallingdotseq 5.752 < 2\pi$

なので

$n = \frac{30\pi}{2\pi} = 15$ 回転

$\theta = 5.752$ rad

問題２：オイラーの公式

オイラーの公式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ を以下の手順で証明せよ。
ただし、$f(\theta) = e^{j\theta}(\cos\theta - j\sin\theta)$ とする。また、$(e^{a\theta})' = ae^{a\theta}$,$(\cos\theta)' = -\sin\theta$,$(\sin\theta)' = \cos\theta$,$j^2 = -1$ は既知の事実とする。

(1) $f(0)$ を求めよ。

$f(0) = e^{j \cdot 0}(\cos 0 - j\sin 0) = 1 \times (1 - j \times 0) = 1$

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}f(\theta)$ を求めよ。

$$\frac{d}{d\theta}f(\theta) = (e^{j\theta})'(\cos\theta - j\sin\theta) + e^{j\theta}(\cos\theta - j\sin\theta)'$$
$$= e^{j\theta}(j\cos\theta - j^2\sin\theta - \sin\theta - j\cos\theta)$$
$$= e^{j\theta} \times 0 \quad = 0$$

(3) $f(\theta)(\cos\theta + j\sin\theta)$ を求めよ。

$$f(\theta)\cdot(\cos\theta + j\sin\theta) = e^{j\theta}(\cos\theta - j\sin\theta)(\cos\theta + j\sin\theta)$$
$$= e^{j\theta}(\cos^2\theta - j^2\sin^2\theta) = e^{j\theta}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$
$$= e^{j\theta}$$

(4) (1) と (2) からどのような事実が結論づけられるか。

$f(\theta) \equiv 1$ （θの値によらず常に1）

(5) (3) と (4) からどのような事実が結論づけられるか。

$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

問題３：微分・積分

次の (1)〜(3) の関数を微分せよ。また (4)〜(6) は積分せよ。

(1) $y = \dfrac{x^2+1}{2x-1}$

$$y' = \frac{2x^2-2x-2}{(2x-1)^2}$$

(2) $y = \sqrt{3-2x}$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{3-2x}}$$

(3) $y = \dfrac{\tan x}{\sin x + 2}$

$$y' = \frac{\sin x + 2 - \sin x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot (\sin x + 2)}$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4} dx \quad = -\frac{1}{3x^2} + C$

(5) $\displaystyle\int e^{e^x} e^x \, dx \quad = e^{e^x} + C$

(6) $\displaystyle\int \sin 5x \, dx \quad = -\frac{1}{5} \cos 5x + C$

問題４：ラプラス変換表

(1) 下記のラプラス変換に関する表を完成せよ．

	$f(t)$	$F(s)$
ディラックデルタ（インパルス）	$\delta(t)$	1
ステップ関数 (インデシャル)	$1(t)$	$\frac{1}{s}$
ランプ関数	t	$\frac{1}{s^2}$
べき（冪）関数	$\frac{1}{n!}t^n$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
指数関数	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
	$\frac{1}{n!}t^n e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
シヌソイド関数（正弦関数）	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
シヌソイド関数（余弦関数）	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
指数減衰振動関数	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
指数減衰振動関数	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

	$f(t)$	$F(s)$
線形性	$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
導関数	$\dot{f}(t)$	$sF(s)-f(0)$
2 階導関数	$\ddot{f}(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-\dot{f}(0)$
n 階導関数	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k)}(0)$
初期値定理	$\lim_{t\to 0} f(t)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
最終値定理	$\lim_{t\to\infty} f(t)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
時間シフト	$f(t-L)$	$e^{-Ls}F(s)$
畳み込み積分 (*convolution*)	$\int f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$
状態遷移行列	e^{At}	$(sI-A)^{-1}$
状態方程式	$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$	$(sI-A)^{-1}BU(s)$

基礎制御工学および演習 (中間試験) 2の2

	2015 年 11 月 17 日　実施	
学籍番号　15FR999	氏名　かいとう れいこ	点数

試験時間は　9 時 00 分～10 時 20 分（80 分）/ テキスト，ノート，資料 持ち込み不可/ 電卓持ち込み可

問題５：複素数 - 三角関数 - ラプラス変換

次の計算結果を指示された表現で解答せよ。

(1) $(a+bj)(c+dj)$　（直交座標表現）

$$(ac-bd)+j(ad+bc)$$

(2) $\dfrac{a+bj}{c+dj}$　（直交座標表現）

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+j\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

(3) $\left(\dfrac{1+j}{2}\right)^3$　（直交座標表現および極座標表現）

$$-\frac{1}{4}+j\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\frac{3}{4}\pi}$$

(4) $e^{j\frac{\cdot}{3}}+e^{j\frac{2\cdot}{3}}$　（直交座標表現および極座標表現）

$$0+\sqrt{3}j=\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{2}}$$

(5) $\log_e j$　（直交座標表現）

$0+j\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$，$n$は整数

(6) $\log_e(-1)$　（直交座標表現）

$= 0 + j(2n+1)\pi$ ，nは整数

(7) $z^6 = 1$ の解　（直交座標表現および極座標表現）

$\left\{ 1,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j,\ -1,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j \right\}$

$\left\{ e^0,\ e^{j\frac{\pi}{3}},\ e^{j\frac{2}{3}\pi},\ e^{j\frac{3}{3}\pi},\ e^{j\frac{4}{3}\pi},\ e^{j\frac{5}{3}\pi} \right\}$

(8) $3\cos\theta + 4\sin\theta$　（$A\sin(\theta+\phi)$ の形式）

$= 5\sin(\theta+\phi)$ ，$\tan\phi = \frac{3}{4}$

(8) $\sin(3\theta)$　（$\sin\theta$ だけでの表現）

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

(9) e^{-at} のラプラス変換

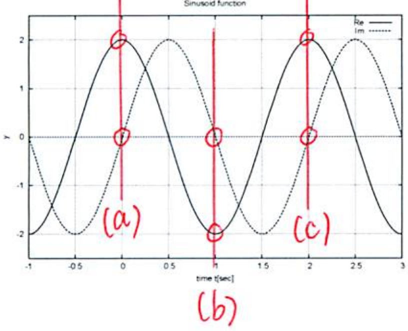
$\frac{1}{s+a}$

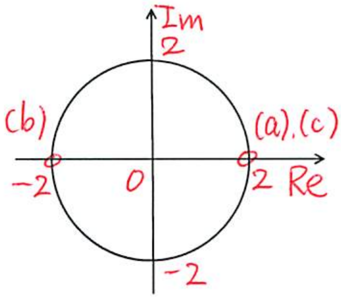
(10) $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ のラプラス変換　（$f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を使って）

$sF(s) - f(0)$

問題６：三角関数

次のシヌソイド波形は複素数の値を持つ信号 $y(t) = y_R(t) + jy_I(t)$ の実部 $y_R(t)$ を実線で、虚部 $y_I(t)$ を破線で、横軸を時間 t として表した図である。この信号の時刻 0,1,2 秒での値を図から読みとり、0 秒を (a),1 秒を (b),2 秒を (c) として複素平面上にプロットせよ．また，波形から振幅，角周波数，初期位相角を読み取り極座標形式で $y(t)$ を t の関数として表現せよ．





振幅　2

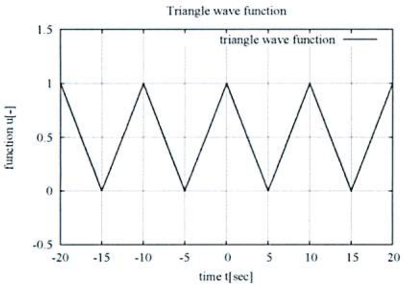
角周波数　π rad/s

初期位相角　0 rad

$$\underline{y = 2e^{j\pi t}}$$

問題７：波形の数式表現

次の波形を数式で表せ．

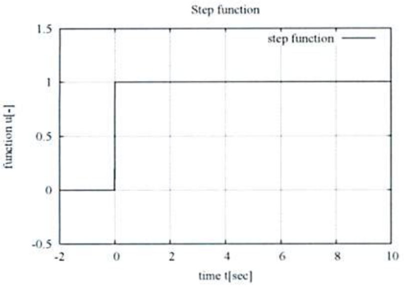


$$u(t) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} 1-\frac{t}{5} & 0 \le t < 5 \\ \frac{t}{5}-1 & 5 \le t < 10 \end{array}\right\} \text{基本波形} \\ \left.\begin{array}{ll} u(t-10), & t \ge 10 \\ u(t+10), & t < 0 \end{array}\right\} \text{再帰定義} \end{cases}$$

問題８：ラプラス変換

次のグラフの実線で表される関数のラプラス変換を定義より導け。

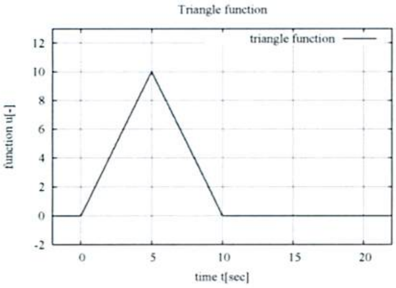
(1)



$$F(s) = \int_0^\infty 1\cdot e^{-st}\cdot dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{s}(0-1) = \underline{\frac{1}{s}}\ //$$

(2)



$$F(s) = \int_0^5 2t\cdot e^{-st}dt + \int_5^{10}(20-2t)e^{-st}dt$$

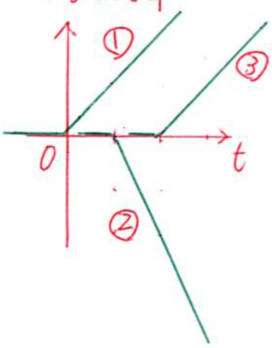
$$= \left[2t\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\right]_0^5 - \int_0^5 2\cdot\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}dt$$

$$+\left[(20-2t)\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\right]_5^{10} - \int_5^{10}(-2)\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}dt$$

$$= -\frac{2}{s^2}e^{-5s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^2}e^{-10s} - \frac{2}{s^2}e^{-5s}$$

$$= \underline{\frac{2}{s^2}\left(1-e^{-5s}\right)^2}\ //$$

＜別解＞



①+②+③

$$= \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^2}e^{-5s} + \frac{2}{s^2}e^{-10s}$$

$$= \underline{\frac{2}{s^2}\left(1-e^{-5s}\right)^2}\ //$$