基礎制御工学および演習 (第6回)

	2013 年 10 月 25 日　実施
学籍番号　13FR999	氏名　かいとうれいこ

回	受講生記入欄	指導員記入欄	評価（再／合）
1	月　日	月　日	再□　合□
2	月　日	月　日	再□　合□
3	月　日	月　日	再□　合□

実施要領

[標準フロー]

1. 受け取ったら，まず学籍番号と氏名を記入する.
2. この時間（金曜 4 限目）中に全問解答し提出する.
3. 採点済みの答案は火曜日の授業前に返却する。
4. その後の取り扱いについては返却時に指示する.

[例外フロー]

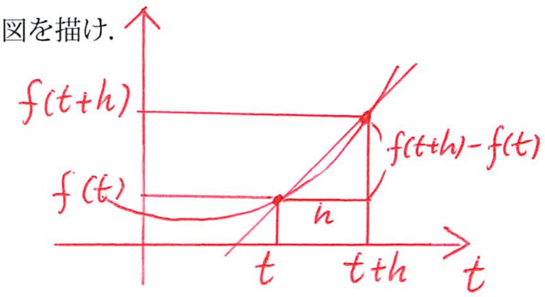
問題1 次の問いに答えよ.

(1-1) 関数 $f(t)$ のラプラス変換の定義式を書け.

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

(1-2) 関数 $f(t)$ の t に関する微分の定義式とその説明図を描け.

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$



(1-3) 2関数の積 $y = f(t)g(t)$ の t に関する微分公式を定義式に基づいて導出せよ.

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)g(t+h) - f(t)g(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h)g(t+h) - f(t)g(t+h) + f(t)g(t+h) - f(t)g(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} g(t+h) + \lim_{h \to 0} f(t) \frac{g(t+h) - g(t)}{h}$$

$$= f'(t)g(t) + f(t)g'(t) \;//$$

(1-4) 2関数 $f(t)$, $g(t)$ の畳み込み積分 $z = f(t) * g(t)$ の定義式を書け.

$$f(t) * g(t) = \int_0^{t} f(t-\tau) g(\tau) d\tau \quad \left(= \int f(t-\tau) g(\tau) d\tau \text{ でも可} \right)$$

(1-4) 関数 $g(t) = e^{-at}b$ のラプラス変換 $G(s)$ を定義に基づいて導出せよ.

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} b \cdot e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} b\, dt$$

$$= \left[-\frac{b}{s+a} e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty} = -\frac{b}{s+a}(0-1)$$

$$= \frac{b}{s+a} \;//$$

(1-5) 関数 $f(t) = \begin{cases} 1 & t \geq L > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ のラプラス変換 $F(s)$ を定義に基づいて導出せよ.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_L^{\infty} e^{st} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_L^{\infty} = -\frac{1}{s}(0 - e^{-Ls}) = \frac{1}{s} e^{-sL} \;//$$

(2) 下記のラプラス変換に関する表を完成せよ．

	$f(t)$	$F(s)$
ディラックデルタ（インパルス関数）	$\delta(t)$	1
ステップ関数 (インデシャル関数)	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$
ランプ関数	t	$\frac{1}{s^2}$
多項式関数	$\frac{1}{n!}t^n$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
指数関数	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
	$\frac{1}{n!}t^n e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
シヌソイド関数	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
シヌソイド関数	$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
指数減衰関数	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
指数減衰関数	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

	$f(t)$	$F(s)$
線形性	$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$
導関数	$\dot{f}(t)$	$sF(s)-f(0)$
2 階導関数	$\ddot{f}(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-\dot{f}(0)$
n 階導関数	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^kf^{(n-k)}(0)$
初期値定理	$\lim_{t\to 0}f(t)$	$\lim_{s\to\infty} sF(s)$
最終値定理	$\lim_{t\to\infty}f(t)$	$\lim_{s\to 0} sF(s)$
時間シフト	$f(t-L)$	$e^{-Ls}F(s)$
畳み込み積分 (*convolution*)	$(f*g)(t)^1$	$F(s)G(s)$
状態遷移行列	e^{At}	$(sI-A)^{-1}$
状態方程式	$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$	$(sI-A)^{-1}BU(s)$

(3) 次の関数のラプラス変換を求めよ．

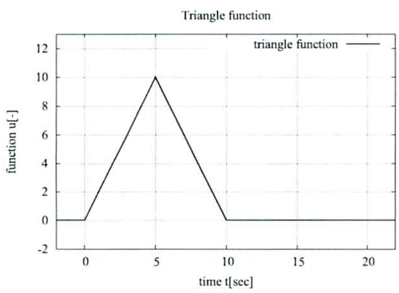
(3-1)

$$f(t) = 1 - e^{-at}$$

$$\mathcal{L}[1-e^{-at}] = \mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[e^{-at}]$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}$$

(3-2) 定義に基づいて求める．



$$\int_0^5 2te^{-st}dt + \int_5^{10}(20-2t)e^{-st}dt$$

$$= \left[2t\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\right]_0^5 - \int_0^5 2\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}dt$$

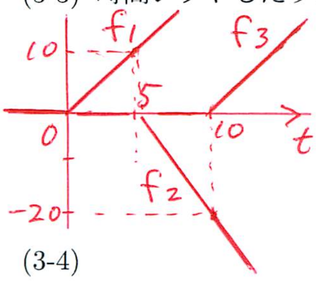
$$+ \left[(20-2t)\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}\right]_5^{10} - \int_5^{10}(-2)\left(-\frac{1}{s}\right)e^{-st}dt$$

$$= -\frac{10}{s}e^{-5s} - \frac{2}{s^2}(e^{-5s}-1) + \frac{10}{s}e^{-5s} + \frac{2}{s^2}(e^{-10s}-e^{-5s})$$

$$= \frac{2}{s^2}(1-2e^{-5s}+e^{-10s}) = \frac{2}{s^2}(1-e^{-5s})^2$$

ここまででもOK

(3-3) 時間シフトしたランプ関数の重ね合わせとして求める．



$$\mathcal{L}[f_1] = \frac{2}{s^2},\quad \mathcal{L}[f_2] = \frac{-4}{s^2}e^{-5s},\quad \mathcal{L}[f_3] = \frac{2}{s^2}e^{-10s}$$

$$f = f_1 + f_2 + f_3$$

$$F(s) = F_1 + F_2 + F_3$$

$$= \frac{2}{s^2}(1-2e^{-5s}+e^{-10s})$$

(3-4)

$$f(t) = 3\sin(2t) + 4\cos(2t)$$

$$\mathcal{L}[\sin(2t)] = \frac{2}{s^2+4},\quad \mathcal{L}[\cos(2t)] = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = 3\times\frac{2}{s^2+4} + 4\times\frac{s}{s^2+4} = \frac{4s+6}{s^2+4}$$

(3-5)

$$f(t) = 3e^{-2t} + 4e^{-3t} + \delta(t)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = 3\mathcal{L}[e^{-2t}] + 4\mathcal{L}[e^{-3t}] + \mathcal{L}[\delta(t)]$$

$$= 3\times\frac{1}{s+2} + 4\times\frac{1}{s+3} + 1$$

$$= \frac{3(s+3)+4(s+2)+(s+2)(s+3)}{(s+2)(s+3)}$$

$$= \frac{s^2+12s+23}{s^2+5s+6}$$